компактно, т.е. $N = G$. Теорема доказана.

Замечательно, что существует конструкция, позволяющая по сжимающему отображению однородного пространства $M = G/_H$ строить расслоения G на слои вида fHg без предположения обширности и даже компактности и связности G и H. А именно, пусть M снабжено инвариантной метрикой (автоматически полной), $\varphi: M \to M$ сжимающее отображение (если M некомпактно, то потребуем, как обычно, липшицевости с константой, меньшей единицы). Рассмотрим следующее отображение $\chi: G \to M$, $\chi(g)$ суть единственная неподвижная точка суперпозиции $\pi(g) \circ \varphi$, где $\pi(g): M \to M$ -действие g. Легко проверяется, что оно непрерывно. Изучим его слои. Пусть $p_0 = f_0 H \in M$, $\chi(d_0) = p_0$, т.е. $d_0 \varphi(p_0) = p_0$. Если d лежит в том же слое, что и d_0, то имеем $d\varphi(p_0) = p_0$, или $d d_0^{-1} p_0 = p_0$, т.е. $d d_0^{-1} f_0 H = f_0 H$, значит, для некоторого $k \in H$, $d d_0^{-1} f_0 = f_0 k$, откуда $d = f_0 k f_0^{-1} d_0$. Ясно, что и обратно, если $d \in f_0 H f_0^{-1} d_0$, то $\chi(d) = p_0$. Итак, слои имеют вид fHg. Более того, элементы f и g могут быть выбраны непрерывно зависящими от p_0, поэтому χ - локально-тривиальное расслоение.

Отметим аналог нашей конструкции для конечных групп. Пусть M -конечное метрическое пространство с расстоянием ρ, инвариантным относительно транзитивно действующей на эквидистантных парах группы G, H - группа изотропии. Тогда разбиения G на слои вида fHg также отвечают графикам таких отношений A, которые "вполне неизометричны" в том смысле, что если $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$, то $\rho(x_1, x_2) \neq \rho(y_1, y_2)$. Любое множество вида fHg состоит из поворота и отражения. Следовательно, имеется ровно $n!$ "вполне неизометричных" отношений.

Список литературы

1. Gluck H., Warner F.W. Great circle fibrations of the three-sphere.- Duke Math. J. 1983, vol.50, No. 1.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 16 1985

УДК 514.75

Г.Л. Свешникова

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕХКРАТНЫМИ НЕВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются невырожденные конгруэнции K^3 кривых второго порядка C [1], [2] с двумя трехкратными невырождающимися фокальными поверхностями.

Отнесем конгруэнцию K^3 к реперу $R = \{A_\alpha\}, \alpha, \beta, \gamma = \overline{1,4}$. Деривационные формулы репера R имеют вид $dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$, причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства $D\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$ и условию эквипроективности $\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0$. Вершины A_1 и A_2 репера R совместим с трехкратными фокальными точками коники C, описывающими невырождающиеся поверхности, вершину A_3 поместим в полюс прямой A_1A_2 относительно коники C, вершину A_4 - в произвольную точку пространства вне плоскости коники.

Уравнения коники C в этом репере, с учетом соответствующей нормировки вершин, примут вид

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0. \tag{1}$$

Формы Пфаффа

$$\omega_i^j, \ \omega_i^3, \ \omega_i^4, \ \omega_3^i, \ \omega_3^4, \ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 \quad (i, j, k = 1, 2; \ i \neq j)$$

являются главными формами конгруэнции K^3. Будем считать линейно независимые формы $\omega_i^4 \overset{\text{def}}{=} \omega_i$ базисными формами конгруэнции K^3.

Пусть ℓ есть линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i) в точках A_i, B_i -точка пересечения прямой ℓ с касательной к линии $\omega_j=0$ на поверхности (A_i). Вершину A_4 зафиксируем на прямой ℓ так, чтобы она являлась четвертой гармонической точкой к точке A_3 относительно точек B_1 и B_2.

Конгруэнция K^3 относительно построенного геометрически фиксированного репера определяется системой уравнений Пфаффа

$$\begin{gathered}
\omega_i^j=0,\ \omega_1^3=\Gamma_1^{3k}\omega_k,\ \omega_2^3=\Gamma_2^{31}\omega_1-\Gamma_1^{31}\omega_2,\ \omega_3^1=\Gamma_2^{31}\omega_1+\Gamma_3^{12}\omega_2,\\
\omega_3^2=\Gamma_3^{21}\omega_1+\Gamma_1^{32}\omega_2;\ \omega_4^1=\Gamma_2^{31}(\Gamma_3^{12}+\Gamma_1^{31})\omega_1+\Gamma_4^{12}\omega_2,\\
\omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\ \omega_4^2=\Gamma_4^{21}\omega^1+\Gamma_1^{32}(\Gamma_3^{21}-\Gamma_1^{31})\omega_2,\ \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k,\\
\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=2\Gamma_3^{41}(\Gamma_3^{12}+\Gamma_1^{31})\omega_1+2\Gamma_3^{42}(\Gamma_3^{21}-\Gamma_1^{31})\omega_2
\end{gathered}\tag{2}$$

и квадратичными уравнениями, полученными при внешнем дифференцировании системы уравнений (2). Анализируя замкнутую систему уравнений, убеждаемся, что конгруэнции K^3 существуют с произволом двух функций двух аргументов.

Назовем конгруэнцией K_1^3 конгруэнцию K^3, у которой поверхность (A_3) является огибающей поверхностью семейства плоскостей коник C, а также существует двустороннее расслоение прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4).

Конгруэнции K_1^3 выделяются из конгруэнций K^3 конечными соотношениями

$$\Gamma_3^{41}=\Gamma_3^{42}=\Gamma_3^{12}=\Gamma_3^{21}=0,\ \ \Gamma_4^{12}=\Gamma_4^{21}=\Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31}. \tag{3}$$

Учитывая равенства (3) в системе (2) и осуществляя соответствующие нормировки вершин репера, получаем систему уравнений Пфаффа конгруэнции K_1^3 в виде:

$$\begin{gathered}
\omega_i^j=\omega_3^4=\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=0,\ \ \omega_1^3=\omega_4^1=\Gamma_1^{31}\omega_1+\omega_2,\\
\omega_2^3=\omega_4^2=\omega_1-\Gamma_1^{31}\omega_2,\ \ \omega_3^i=\omega_i,\ \ \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k,\\
\omega_1^1-\omega_2^2=-\Gamma_4^{32}\omega_1+\Gamma_4^{31}\omega_2,\ \ \omega_3^3-\omega_4^4=-(\Gamma_4^{32}\omega_1+\Gamma_4^{31}\omega_2),\\
d\Gamma_1^{31}=-\Gamma_1^{31}(\omega_3^3-\omega_4^4)+\Gamma_4^{31}\omega_1-\Gamma_4^{32}\omega_2,\ \ (\Gamma_1^{31}\neq 0),\\
d\Gamma_4^{31}=\Gamma_4^{31}(\omega_4^4-\omega_2^2),\ \ d\Gamma_4^{32}=\Gamma_4^{32}(\omega_4^4-\omega_1^1).
\end{gathered}\tag{4}$$

Доказано, что система уравнений (4) является вполне интегрируемой и определяет конгруэнции K_1^3 с точностью до постоянных.

Т е о р е м а 1. Конгруэнции K_1^3 обладают следующими свойствами: 1/ фокусы луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) гармонически делят точки A_3 и A_4; 2/ торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4) и (A_iA_3) соответствуют; 3/ асимптотические линии на поверхностях (A_i) и (A_3) соответствуют; 4/ двойные точки Ермолаева фокальных поверхностей (A_1) и (A_2) гармонически делят точки A_3 и A_4.

Назовем конгруэнцией K_2^3 такую конгруэнцию K^3, для которой асимптотические линии на фокальных поверхностях (A_i) гармонически делят координатные линии $\omega_1=0$ и $\omega_2=0$, а точка A_3 является характеристической точкой грани $(A_1A_2A_3)$.

Из условий определения конгруэнции K_2^3 получаем следующие конечные соотношения:

$$\begin{gathered}
\Gamma_3^{12}=\Gamma_3^{21}=\Gamma_3^{41}=\Gamma_3^{42}=0,\ \ \Gamma_4^{21}=-(\Gamma_1^{32})^2,\\
\Gamma_4^{12}=-(\Gamma_2^{31})^2,\ \ \Gamma_4^{12}=\Gamma_4^{21},\ \ (\Gamma_1^{32})^2-(\Gamma_2^{31})^2=0.
\end{gathered}\tag{5}$$

Так как $(\Gamma_1^{32})^2-(\Gamma_2^{31})^2=0$, то возможны два случая. Случай $\Gamma_1^{32}-\Gamma_2^{31}=0$ приводит к противоречию, поэтому существует только один класс конгруэнций K_2^3, для которого имеет место соотношение $\Gamma_1^{32}+\Gamma_2^{31}=0$.

Система уравнений Пфаффа конгруэнции K_2^3 принимает вид

$$\begin{gathered}
\omega_1^2=\omega_2^1=\omega_3^4=\omega_4^3=\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=\omega_1^1-\omega_2^2=0,\\
\omega_3^3-\omega_4^4=0,\ \ \omega_1^3=\omega_1+\omega_2,\ \ \omega_2^3=-\omega_1-\omega_2,\\
\omega_3^1=-\omega_1,\ \ \omega_3^2=\omega_2,\ \ \omega_4^1=\omega_4^2=-\omega_1-\omega_2.
\end{gathered}\tag{6}$$

Система уравнений (6) является вполне интегрируемой.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции K_2^3 обладают следующими свойствами: 1/ прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4) являются параболическими; 2/ фокусами лучей A_iA_3 прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) являются точки

A_i и A_3; 3/ фокусами лучей A_iB_i и A_iB_j прямолинейных конгруэнций (A_iB_i) и (A_iB_j) являются соответственно точки A_i, B_i и A_i, B_j; 4/торсы прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) и (A_iB_i) соответствуют; 5/ существует двустороннее расслоение прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4); 6/поверхность (A_4) вырождается в прямую $E_{12}A_4$, где $E_{12}=A_1+A_2$; 7/ асимптотические линии на поверхностях (A_3), (E^*_{12}), (B_i) и (F_i), где E^*_{12} -четвертая гармоническая к точке E_{12} относительно вершин A_1 и A_2, а F_1 и F_2 -точки пересечения прямой $E_{12}A_3$ с коникой C, соответствуют.

Т е о р е м а 3. Фокальные поверхности (A_1) и (A_2) конгруэнции K^3_2 являются инвариантными квадриками, уравнения которых имеют соответственно вид:

$$2(x^2)^2+(x^3)^2-2x^3x^4-2x^1x^2=0, \qquad (7)$$

$$2(x^1)^2+(x^3)^2+2x^3x^4-2x^1x^2=0. \qquad (8)$$

Список литературы

1.Малаховский В.С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве.-Тр.Томского ун-та,1968.Геометрич.сб.,вып.3,1963, с.43-53.

2.Свешникова Г.Л. Конгруэнции кривых второго порядка с двукратными невырождающимися фокальными поверхностями.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.14,Калининград,1983,с.87-91.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Е.В. Скрыдлова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ КОНИКОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

В трехмерном проективном пространстве P_3 изучается один из специальных классов вырожденных [1] конгруэнций $(C_\rho)_{1,2}$, порожденных коникой C, описывающей однопараметрическое семейство, и плоскостью ρ, описывающей конгруэнцию с невырождающейся огибающей поверхностью.

Вырожденные конгруэнции такого типа характеризуются отображением, ставящим в соответствие каждой плоскости ρ единственную конику C, полным прообразом которой является одномерное подмногообразие $(\rho)_C$ плоскостей ρ. При этом каждое семейство $(\rho)_C$ высекает на огибающей поверхности плоскостей ρ некоторую линию Γ_C.

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_\alpha=\omega^\beta_\alpha A_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4),$$

а линейные дифференциальные формы ω^β_α удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma$$

и условию эквипроективности

$$\omega^1_1+\omega^2_2+\omega^3_3+\omega^4_4=0.$$

Специализируем репер R таким образом, чтобы вершина A_4 совпадала с характеристической точкой плоскости ρ, вершины A_1 и A_2 совпадали с точками пересечения коники C и плоскости ρ, а вершина A_3 являлась полюсом прямой